

12 практикалық сабақ

Функцияның өсуі және кемуі. Экстремум.

Егер $x_1 < x_2$ теңсіздігін қанағаттандыратын (a, b) интервалында жататын аргумент мәндері үшін $y = f(x)$ функциясының мәндері $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) теңсіздігін қанағаттандыратын болса, онда берілген $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында *өспелі (кемімелі) функция* деп аталады.

Функцияның өсу және кему белгілері.

1) Егер $\forall x \in (a; b)$ үшін $f'(x) > 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында өспелі болады.

2) Егер $\forall x \in (a; b)$ үшін $f'(x) < 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы (a, b) интервалында кемімелі болады.

Егер x_0 нүктесінің $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ аймағында жатқан барлық x -тер үшін $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *максимумы (минимумы)* делінеді.

Максимум және минимумды біріктіріп *экстремум* деп атайды.

Экстремумның қажетті шарты. Егер $y = f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесінде экстремумы бар болса, онда сол нүктеде $f'(x_0) = 0$ (немесе $f'(x)$ үзілісті) болады.

$f'(x_0) = 0$ (немесе $f'(x)$ үзілісті) болатын $x = x_0$ нүктесі $f(x)$ функциясының *кризистік нүктесі* делінеді.

Экстремумның жеткілікті шарттары.

I. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 кризистік нүктеде үзіліссіз және сол нүктеден өткенде $f'(x)$ таңбасын

(+)-тен (-)-ке өзгертсе, онда x_0 - максимум нүктесі, ал

(-)-тен (+)-ке өзгертсе, онда x_0 - минимум нүктесі

болады.

II. Егер $f'(x_0) = 0$ және $f''(x_0) < 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде максимумын, ал $f''(x_0) > 0$ болса, онда минимумын қабылдайды.

Функцияның берілген кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін келесі амалдар орындалады:

а) кесіндідегі барлық кризистік нүктелерін табу керек;

ә) шеткі ($x = a, x = b$) нүктедегі және (a, b) аралығында жататын кризистік нүктелердегі функцияның мәндері есептелінеді;

б) осы табылған функция мәндерінің ең үлкені $[a, b]$ кесіндісіндегі функцияның ең үлкен мәні болып, ал ең кішісі – ең кіші мәні болып табылады.

475. $y = x^3 - 6x^2$ функциясының өсу және кему интервалдарын табу керек.

Шешуі: Туындысын табайық: $y' = 3x^2 - 12x$.

$(-\infty; 0)$ және $(4; +\infty)$ интервалдарында $y' > 0$,

$(0; 4)$ интервалында $y' < 0$.

Сонымен, $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ -да берілген функция өседі,
 $x \in (0; 4)$ -да функция кемиді. ▲